# О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей

*Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачева*

Настоящая заметка представляет собой обобщение одного результата Б. В. Гнеденко [1] на многомерный случай *).

Пусть дана последовательность взаимно независимых, одинаково распределенных случайных $s$-мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_s^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения. Обозначим через $P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ вероятность того, что

$$\xi_k^{(n)} = x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Будем считать, что моменты первого и второго порядка

$$a_k = M\xi_k^{(n)}, \quad b_{ij} = M(\xi_i^{(n)}\xi_j^{(n)})$$

конечны, а детерминант

$$\Delta = |b_{ij}|$$

отличен от нуля.

Пусть далее

$$\zeta^{(n)} = (\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_s^{(n)}) = \sum_{m=1}^{n} \xi^{(m)} = \left( \sum_{m=1}^{n} \xi_1^{(m)}, \sum_{m=1}^{n} \xi_2^{(m)}, \ldots, \sum_{m=1}^{n} \xi_s^{(m)} \right). \tag{2}$$

Очевидно, что компоненты вектора $\zeta^{(n)}$ могут также принимать только целочисленные значения. Пусть $P_n(z) = P_n(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ — вероятность того, что компоненты вектора $\zeta^{(n)}$ примут значения

$$\zeta_k^{(n)} = z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Известно, что при некоторых довольно общих условиях вероятности $P_n(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ допускают асимптотическое представление вида

$$P_n(z) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)}, \tag{3}$$

где $a$ обозначает вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, а

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j$$

есть квадратичная форма с коэфициентами

$$B_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta},$$

образующими матрицу, обратную матрице $\|b_{ij}\|$.

---

*) Краткое сообщение об этом результате было опубликовано нами ранее [2]; здесь мы даём полное его доказательство.

Нашей задачей является указание необходимых и достаточных условий для существования указанного асимптотического представления. Более точно мы доказываем следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы разности*

$$n^{\frac{s}{2}} P_n(z) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4}$$

*для всех векторов $z$ с целочисленными координатами стремились равномерно (относительно $z$) к нулю, необходимо и достаточно, чтобы* ($s$) *общий наибольший делитель объемов $s$-мерных симплексов, все $s+1$ вершин которых лежат в целочисленных точках $x$, для которых*

$$P(x) > 0,$$

*был равен* $\frac{1}{s!}$.

Естественно, что в условии ($s$) имеются в виду невырожденные s-мерные симплексы. Условие $|\Delta| \neq 0$ гарантирует их существование.

Условие ($s$) равносильно следующему.

($s'$) — параллелепипедальная решетка, порождаемая всеми векторами

$$x = x' - x'',$$

для которых $P(x') > 0$, $P(x'') > 0$, совпадает с решеткой всех целочисленных точек $s$-мерного пространства.

Доказательство. Обозначим через

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_s) = Me^{i\sum_{\nu=1}^{s} t_\nu \xi_\nu} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} P(x_1, \ldots, x_s)$$

характеристическую функцию случайного вектора $\xi^{(n)}$. Тогда характеристическая функция вектора суммы $\zeta^{(n)}$ будет равна

$$f^n(t_1, \ldots, t_s) = Me^{i\sum_{\nu=1}^{s} \zeta_\nu t_\nu} = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} P_n(z_1, \ldots, z_s).$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{i(t_1 z_1 + t_2 z_2 + \ldots + t_s z_s)}$ и проинтегрируем по $t_1, t_2, \ldots, t_s$ каждый раз в пределах от $-\pi$ до $\pi$. Тогда получим

$$(2\pi)^s P_n(z_1, \ldots, z_s) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} f^n(t_1, \ldots, t_s) e^{-i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} dt_1 \ldots dt_s.$$

Положим

$$x_i = \frac{z_i - na_i}{\sqrt{n}}; \quad z_i = x_i\sqrt{n} + na_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{5}$$

тогда

$$(2\pi)^s P^n(x\sqrt{n} + na) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sqrt{n}(t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} e^{-in(a_1 t_1 + \ldots + a_s t_s)} f^n(t_1, \ldots, t_s)\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Обозначим

$$\bar{f}(t_1, \ldots, t_s) = e^{-i(a_1 t_1 + \ldots + a_s t_s)} f(t_1, \ldots, t_s),$$

имеем

$$(2\pi)^s P_n(x\sqrt{n}+na) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sqrt{n}(t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} \bar{f}^n(t_1, \ldots, t_s)\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Произведем замену переменных, положив

$$y_i = t_i \sqrt{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Находим

$$(2\pi)^s n^{\frac{s}{2}} P_n(x\sqrt{n}+na) = \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \ldots \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) dy_1 \ldots dy_s.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \cdot \frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, \ldots, x_s)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s) - \frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} dy_1 \ldots dy_s,$$

где $q(y) = q(y_1, \ldots, y_s)$ — квадратичная форма с коэфициентами $b_{ij}$,

$$q(y) = \sum_{i,\, j=1}^{s} b_{ij} y_i y_j.$$

Нам необходимо показать, что при $n \to \infty$ равномерно в $s$-мерном интервале $-\infty < z_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ разность

$$R_n = (2\pi)^s \left[ n^{\frac{s}{2}} P_n(x\sqrt{n} + na) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q(x)} \right]$$

стремится к нулю.

Представим $R_n$ в виде суммы трех интегралов

$$R_n = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{\mathfrak{G}(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \left[ \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} \right] dy_1 \ldots dy_s,$$

$$I_2 = \int_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s) - \frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} dy_1 \ldots dy_s$$

$$I_3 = \int_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) dy_1 \ldots dy_s,$$

где $\mathfrak{G}(n)$ — область, определяемая неравенствами $|y_i|<u$ $(i=1,\ldots,s)$, $\overline{\mathfrak{G}}(n)$ — часть пространства, внешняя к $\mathfrak{G}(n)$, $\overline{\mathfrak{G}}_1(n)$ — общая часть $\overline{\mathfrak{G}}(n)$ и области, определяемой неравенствами $|y_i|\leqslant\pi\sqrt{n}$, $i=1, 2, \ldots, s$.

Величину $u$ определим позднее так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} u=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u}{\sqrt{n}}=0$.

Тогда

$$|I_2|\leqslant\int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}\,dy_1\ldots dy_s \xrightarrow[\text{при } n\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

Перейдем к оценке интеграла $I_1$, который запишем в следующем виде:

$$I_1=\int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-i(x_1y_1+\ldots+x_sy_s)-\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}\left[e^{n\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}-1\right]dy_1\ldots dy_s.$$

Покажем, что при $n\to\infty$ величина

$$\varrho_n=n\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)$$

стремится к нулю равномерно в $s$-мерном интервале $|y_i|\leqslant u$ $(i=1,2,\ldots,s)$.

Действительно, так как при $n\to\infty$ величины $\dfrac{u}{\sqrt{n}}\to 0$, то в интервале $|y_i|\leqslant u$ $(i=1,\ldots,s)$ при $n$ достаточно больших имеет место неравенство

$$\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|<\frac{1}{2}, \tag{7}$$

в силу чего можно написать

$$\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^{\nu}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$$

и

$$\varrho_n=\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)+$$

$$+\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]n+n\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^{\nu}.$$

Обозначим через $\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)$ функцию распределения вектора, для которого $\overline{f}(t_1,\ldots,t_s)$ является характеристической функцией, тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{f}(t_1,\ldots,t_s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1v_1+\ldots+t_sv_s)}\,d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s),\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}v_i\,d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)=0, \qquad (i=1,2,\ldots,s)\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}v_iv_j\,d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)=b_{ij}, \qquad (i,j=1,2,\ldots,s)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В силу этих соотношений и неравенства

$$|e^{i\alpha}-1-i\alpha|\leqslant\frac{\alpha^2}{2}, \tag{9}$$

которое имеет место при любом вещественном $\alpha$, имеем

$$\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}v_1+\ldots+\frac{y_s}{\sqrt{n}}v_s\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)\right]d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s).$$

$$\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)=\frac{1}{2n}q(y_1,\ldots,y_s). \tag{10}$$

В силу (7) и (10) имеем

$$n\left|\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^{\nu}\right|\leqslant\frac{n}{2}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^{\nu}=$$

$$=\frac{n}{2}\frac{\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^2}{1-\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|}\leqslant n\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^2\leqslant\frac{[q(y_1,\ldots,y_s)]^2}{4n}.$$

Пусть $L\to\infty$ при $n\to\infty$ и так, что $L=o(\sqrt{n})$.

В силу соотношений (8) имеем:

$$\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)+n\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]=$$

$$=n\int_{D(n)}\left[e^{i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2\right]d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+n\int_{\overline{D}(n)}\left[e^{i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2\right]d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s), \tag{11}$$

где $D(n)$ — область, определяемая неравенствами $|v_i|\leqslant L$, $i=1,2,\ldots,s$, а $\overline{D}(n)$ — часть пространства, внешняя к $D(n)$.

В силу соотношения

$$\left|e^{i\alpha}-1-i\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|^3}{6},$$

имеющего место при всяком вещественном $\alpha$, имеем

$$\left|\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)+n\left[\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{D(n)}\frac{1}{6}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^3 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+n\int\limits_{\bar{D}(n)}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\frac{L}{\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+n\int\limits_{\bar{D}(n)}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)=$$

$$=\frac{L}{6\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+y_1^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1^2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+2y_1y_2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1v_2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\ldots+y_s^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_s^2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s). \qquad (12)$$

Таким образом,

$$|\varrho_n|\leqslant\frac{L}{6\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+y_1^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1^2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\ldots$$

$$\ldots+y_s^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_s^2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\frac{[q(y_1,\ldots,y_s)]^2}{4n}. \qquad (13)$$

Величины

$$\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_jd\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)\qquad(i,j=1,2,\ldots,s) \qquad (14)$$

при $n\to\infty$ стремятся к нулю.

Положим

$$u=\min\left[\sqrt[5]{n},\ \max_{i,}\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_jd\bar{F}(v_1,\ldots,v_s),\ \sqrt[4]{\frac{\sqrt{n}}{L}}\right].$$

Очевидно, что

$$\frac{u}{\sqrt{n}}\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

и $u\to\infty$ при $n\to\infty$.

Тогда в интервале $|y_i|\leqslant u$ $(i=1,2,\ldots,s)$ имеет место неравенство

$$|\varrho_n|\leqslant K_1\left(\frac{L}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}+K_2\max_{i,\,i}\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_jd\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+K_3\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}},$$

где $K_1$, $K_2$, $K_3$ — некоторые константы. Отсюда заключаем, что $\varrho_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При достаточно малых по модулю $\alpha$ имеет место оценка

$$|e^{\alpha}-1|\leqslant 2\alpha,$$

откуда

$$|I_1|\leqslant\int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}\cdot 2|\varrho_n|\,dy_1\ldots dy_s\leqslant$$

$$\leqslant\left[K_1\left(\frac{L}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}+K_2\max_{i,j}\int\limits_{\overline{D}(n)} v_iv_j d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)+\right. \tag{15}$$

$$\left.+K_3\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}\right]\int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y)}\,dy_1\ldots,dy_s\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Для оценки интеграла $I_3$ воспользуемся следующей леммой.

Пусть дана совокупность точек $(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{is})$ $(i=1,2,\ldots)$ с целочисленными координатами в $s$-мерном пространстве. Не теряя общности, можем положить, что начало координат $O(0,0,\ldots,0)$ принадлежит этой совокупности. При этих предположениях имеет место следующее предложение:

Лемма. *Для того чтобы из совокупности точек с целочисленными координатами*

$$(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{is}) \qquad (i=1,2\ldots) \tag{16}$$

*в $s$-мерном пространстве путем соответственного суммирования их координат можно было получить совокупность точек, лежащих во всех вершинах $s$-мерного куба со стороной равной единице, необходимо и достаточно, чтобы все миноры $s$-го порядка матрицы, составленной из координат точек (16), в своей совокупности были взаимно просты.*

Наше требование означает существование таких целых неотрицательных чисел $m_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,s)$, чтобы имели место следующие соотношения для некоторого конечного числа $n\geqslant s$ точек данной совокупности (16)

$$(17_1)\quad\begin{cases} m_{11}x_{11}+m_{21}x_{21}+\ldots+m_{n1}x_{n1}=l_1\\ m_{11}x_{12}+m_{21}x_{22}+\ldots+m_{n1}x_{n2}=l_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m_{11}x_{1s}+m_{21}x_{2s}+\ldots+m_{n1}x_{ns}=l_s \end{cases}$$

$$(17_2)\quad\begin{cases} m_{12}x_{11}+m_{22}x_{21}+\ldots+m_{n2}x_{n1}=l_1+1\\ m_{12}x_{12}+m_{22}x_{22}+\ldots+m_{n2}x_{n2}=l_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m_{12}x_{1s}+m_{22}x_{2s}+\ldots+m_{n2}x_{ns}=l_s \end{cases} \tag{17}$$

$$(17_3)\quad\begin{cases} m_{13}x_{11}+m_{23}x_{21}+\ldots+m_{n3}x_{n1}=l_1\\ m_{13}x_{12}+m_{23}x_{22}+\ldots+m_{n3}x_{n2}=l_2+1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m_{13}x_{1s}+m_{23}x_{2s}+\ldots+m_{n3}x_{ns}=l_s \end{cases}$$

$$(17_4)\begin{cases} m_{14}x_{11} + m_{24}x_{21} + \ldots + m_{n4}x_{n1} = l_1 + 1 \\ m_{14}x_{12} + m_{24}x_{22} + \ldots + m_{n4}x_{n2} = l_2 + 1 \\ m_{14}x_{13} + m_{24}x_{23} + \ldots + m_{n4}x_{n3} = l_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{14}x_{1s} + m_{24}x_{2s} + \ldots + m_{n4}x_{ns} = l_s \end{cases} \qquad (17)$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$(17_{2^s})\begin{cases} m_{12^s}x_{11} + m_{22^s}x_{21} + \ldots + m_{n2^s}x_{n1} = l_1 + 1 \\ m_{12^s}x_{12} + m_{22^s}x_{22} + \ldots + m_{n2^s}x_{n2} = l_2 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{12^s}x_{1s} + m_{22^s}x_{2s} + \ldots + m_{n2^s}x_{ns} = l_s + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что разрешимость совокупности систем уравнений (17) эквивалентна разрешимости следующей совокупности $s$ независимых систем по $s$ уравнений относительно $a_{ij}$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, s$)

$$(18_1)\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{n1}x_{n1} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{21}x_{22} + \ldots + a_{n1}x_{n2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{11}x_{1s} + a_{21}x_{2s} + \ldots + a_{n1}x_{ns} = 0 \end{cases}$$

$$(18_2)\begin{cases} a_{12}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{n2}x_{n1} = 0 \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{n2}x_{n2} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{12}x_{1s} + a_{22}x_{2s} + \ldots + a_{n2}x_{ns} = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$(18_s)\begin{cases} a_{1s}x_{11} + a_{2s}x_{21} + \ldots + a_{ns}x_{n1} = 0 \\ a_{1s}x_{12} + a_{2s}x_{22} + \ldots + a_{ns}x_{n2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1s}x_{1s} + a_{2s}x_{2s} + \ldots + a_{ns}x_{ns} = 1. \end{cases}$$

Запишем системы $(18_1)$, $(18_2)$,..., $(18_s)$ в матричной форме

$$(19_1)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(19_2)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$(19_s)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Доказательство достаточности. Известно (см., напр., [3]), что существуют такие две унимодулярные квадратные целочисленные матрицы: $S$ (порядка $s$) и $N$ (порядка $n$), которые приводят матрицу $(x_{ij})$ к каноническому виду

$$E = S(x_{ij})N, \tag{20}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{ss} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и $\varepsilon_{ii}$ — целые, причем последующие делят предыдущие.

Введем взамен неизвестных $a_{ij}$ неизвестные $b_{ij}$ по следующим формулам

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{21}$$

Введя соотношения (21) в уравнения $(18_1)$, $(18_2)$,..., $(18_s)$, получим

$$\begin{gathered} (x_{ij})N \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (x_{ij})N \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{22}$$

Умножим равенства (22) слева на матрицу $S$. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{ss} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ s_{2i} \\ \vdots \\ s_{si} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{23}$$

Известно (см., напр., [3]), что общие наибольшие делители миноров $s$-го порядка матрицы $(x_{ij})$ и матрицы $E$ совпадают с точностью до множителя $\pm 1$. Так как матрица $E$ имеет только один отличный от нуля минор $s$-го порядка, то имеем

$$\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} \ldots \varepsilon_{ss} = \pm 1.$$

Отсюда следует, что все $\varepsilon_{ii} = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, а значит система (23) разрешима относительно $b_{ij}$ в целых числах.

В силу того, что система (23) эквивалентна системам $(18_1)$, $(18_2)$, $\ldots$, $(18_s)$, из подстановки (21) получаем решения для $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, s)$ в целых числах.

Доказательство необходимости. Допустим, что общий наибольший делитель матрицы $(x_{ij})$ $\delta > 1$. Из этого следует, что

$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \ldots \varepsilon_{ss}$$

делится на $\delta$. Тогда хотя бы одно из чисел $\varepsilon_{ii}$ отличается от $\pm 1$.

Из системы (23) следует, что $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{is}$ делятся на $\varepsilon_{ii}$. Отсюда детерминант

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1s} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i1} & s_{i2} & \ldots & s_{is} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{s1} & s_{s2} & \ldots & s_{ss} \end{vmatrix} \neq 1,$$

что противоречит унимодулярности матрицы $S$. Таким образом, лемма доказана.

Из приведенной леммы следует, что в случае выполнения условия $(s')$, для всех $i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ найдется такое число $j$ и числа $l_i$, что вероятности попадания вектора-суммы $\zeta_j$ на все вершины некоторого единичного куба будут все положительны, т. е. для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ будет

$$P(l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \ldots, l_s) \times$$
$$\times P_j(l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}, l_i + 1, l_{i+1}, \ldots, l_s) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (24)$$

Оценим характеристическую функцию вектора суммы $\zeta_j$. Очевидны следующие $s$ соотношений:

$$f^j(t_1, \ldots, t_s) = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} P_j(z_1, \ldots, z_s) =$$

$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_{\nu-1} z_{\nu-1} + 2t_\nu z_\nu + t_{\nu+1} z_{\nu+1} + \ldots + t_s z_s)} [P_j(z_1, \ldots, 2z_\nu, \ldots, z_s) +$$

$$+ P_j(\ldots, 2z_\nu + 1, \ldots) e^{it_\nu}]; \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)|\leqslant \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{z_s=-\infty}^{\infty}|P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+$$

$$+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)\,e^{it_\nu}|;\quad(\nu=1,2,\ldots,s)$$

$$|P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)e^{it_\nu}|=$$

$$\sqrt{[P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)]^2-4P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)\sin^2\frac{t_\nu}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)-2\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}\sin^2\frac{t_\nu}{2},\quad(25)$$

(последнее в силу неравенства

$$\sqrt{a^2-2ab}\leqslant a-b,$$

которое имеет место при произвольных числах $a$ и $b$).

Отсюда

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)|\leqslant \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{z_s=-\infty}^{\infty}[P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)]-$$

$$-2\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{z_s=-\infty}^{\infty}\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}\sin^2\frac{t_\nu}{2}=1-\delta_{j\nu}\sin^2\frac{t_\nu}{2},$$

где

$$\delta_{j\nu}=2\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{z_s=-\infty}^{\infty}\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}.$$

В силу соотношений (24) величины $\delta_{j\nu}>0$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Из неравенства

$$\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}\leqslant\frac{1}{2}P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\,P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots),\ (\nu=1,2,\ldots,s)$$

следует, что

$$\delta_{j\nu}\leqslant\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{z_s=-\infty}^{\infty}[P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)]=1,\quad(\nu=1,2,\ldots,s).$$

В интервале $|t|\leqslant\pi$

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|\geqslant\frac{|t|}{\pi},$$

а значит в этом интервале

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)|\leqslant 1-\delta_{j\nu}\frac{t_\nu^2}{\pi^2}\quad(\nu=1,2,\ldots,s).\qquad(27)$$

В силу оценок (27) имеем оценку

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)|\leqslant 1-\frac{\sum_{\nu=1}^{s}\delta_{j\nu}^2t_\nu^2}{s\pi^2}\leqslant e^{\frac{-\sum_{\nu=1}^{s}t_\nu^2\delta_{j\nu}}{s\pi^2}}.\qquad(28)$$

Оценим теперь интеграл $I_3$.

$$|I_3|\leqslant\int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)}\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)\right|^n dy_1\ldots dy_s.$$

Обозначим через $N$ целую часть дроби $\frac{n}{j}$. Так как $|\overline{f}(t_1,\ldots,t_s)| \leqslant 1$, то имеем

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)} \left| f^j\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)\right|^N dy_1 \ldots dy_s.$$

В силу оценки (28) имеем

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)} e^{-\frac{N\sum\limits_{\nu=1}^{s} y_\nu^2 \frac{\delta_{j\nu}}{n}}{s\pi^2}} dy_1 \ldots dy_s < \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{\frac{N}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{s} y_\nu^2 \delta_{j\nu}}{s\pi^2}} dy_1 \ldots dy_s.$$

Так как

$$N(j) \leqslant n < N(j+1),$$

то

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{s} y_\nu^2 \delta_{j\nu}}{s\pi(j+1)}} dy_1 \ldots dy_s \xrightarrow[\text{при } n\to\infty]{} 0.$$

Соотношения (6), (15) и (31) для $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3|$ доказывают достаточность условия теоремы.

Легко видеть, что при нарушении условия $(s')$ асимптотическое представление (3) не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, которая требуется в нашей теореме, но и вообще является совершенно непригодным для представления вероятностей $P_n(z)$, так как, очевидно, возможные значения векторной суммы будут иметь систематические пропуски.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

Поступило 22.IX 1948.

---

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, О локальной теореме теории вероятностей, Успехи матем. наук, т. III, вып. 3, 1948.

2. Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачева, Многомерная локальная предельная теорема теории вероятностей, ДАН СССР, № 7, т. 60, 1948.

3. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, Гостехиздат, 1947, т. 2. стр. 130—132.