АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Отдел теории вероятностей и математической статистики

На правах рукописи

Д. Г. МЕЙЗЛЕР

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

ЛЬВОВ — 1950

Предельные законы распределения для максимального члена вариационного ряда

1. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

последовательность независимых случайных величин, подчиненных соответственно законам распределения

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

Положим

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

тогда функция распределения максимального члена η_n есть

$$\Phi_n(x) = P\{\eta_n < x\} = \prod_{k=1}^{n} F_k(x).$$

Рассмотрим нормированный максимальный член

$$\overline{\eta}_n = \frac{\eta_n - b_n}{a_n},$$

где $a_n > 0$ и b_n — вещественные константы. Пусть при $n \to \infty$ функция распределения величины $\overline{\eta}_n$

$$\overline{\Phi}_n(x) = \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n)$$

стремится к предельному распределению $\Phi(x)$; требуется найти характеристический признак всех тех распределений $\Phi(x)$, которые могут выступать в только что описанной роли.

Эта задача представляет интерес для теории вероятностей и математической статистики, в частности, предельные распределения для максимального члена находят себе приложение в гидрологических расчетах (об'емы водохранилищ), исследованиях крайних возрастных групп, строительном деле и других областях приложения математической статистики (ср. Мат. в СССР за 30 лет, [5]).

Исчерпывающее решение этой задачи для случая, когда рассматриваемые величины ξ_n одинаково распределены, было дано Б. В. Гнеденко [1]. Предлагаемая нами работа обобщает результаты Б. В. Гнеденко на случай, когда величины ξ_n разно распределены. Чтобы получить в рассматриваемом нами случае осмысленную постановку задачи, отвечающую запросам теории вероятностей, мы требуем, чтобы каждый из множителей $F_k(a_n x + b_n)$, участвующих в образовании распределения максимального члена η_n, был в некотором смысле индивидуально пренебрегаемым в пределе (ср. соответственную задачу в области предельных распределений для нормированных сумм независимых случайных величин, [6], § 5). В строгих терминах задача формулируется следующим образом:

Мы скажем, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G, если существует такая последовательность функций распределения $F_k(x)$ и такие вещественные константы $a_n > 0$ и b_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n) = \Phi(x) \tag{1}$$

и для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$, равномерно относительно $k = k(n)$ $[1 \leqslant k \leqslant n]$

$$\lim_{n\to\infty} F_k(a_n x + b_n) = 1. \tag{2}$$

Требуется найти характеристический признак законов класса G.

2. Постановка задачи приводится в § 1. В § 2 рассматривается частный случай, а именно, когда константы a_n, фигурирующие в (1) и (2), не зависят от n. Обозначим через G^*

класс распределений, соответствующих этому случаю, тогда имеет место следующая теорема:

Для того, чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу G^*, необходимо и достаточно, чтобы она была логарифмически выпуклой.

В § 3 также рассматривается частный случай, когда константы c_n не зависят от n. В этом случае необходимо, чтобы выполнялось одно из соотношений:

$$\Phi(0) = 1 \tag{3}$$

или

$$\Phi(0) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через G^-, соответственно G^+, класс тех распределений, соответствующих рассматриваемому случаю, для которых выполняется соотношение (3), соответственно (4). Доказывается следующая теорема:

Для того, чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу G^- (соответственно G^+), необходимо и достаточно, чтобы функция $\overline{\Phi}(x) = \Phi(-e^{-x})$ (соответственно $\overline{\Phi}(x) = \Phi(e^x)$) принадлежала классу G^*. Эта теорема дает возможность применить результаты § 2 к исследованию свойств классов G^- и G^+.

В § 4 доказываются некоторые вспомогательные предложения, которые дают возможность получить в § 5 следующий результат:

Класс G исчерпывается распределениями классов G^*, G^- и G^+ (очевидно, ввиду (3) и (4), с точностью до линейного преобразования аргумента $X = x + b$).

Приведенная выше теорема выпуклости дает возможность установить ряд свойств распределений класса G, которые обнаруживают аналогию со свойствами распределений класса L (ср. [6], § 5—6).

В § 2—3 приводятся также признаки распределений класса G, структурно аналогичные признакам распределений класса L, найденным П. Леви ([6], § 6). Последние были опублико-

ваны в работах [3] и [4], однако, приведенная выше теорема § 5 дается теперь без тех ограничительных предположений, при которых получен результат [4].

Последний § 6, не связанный с предыдущими, посвящен одному вопросу, касающемуся случая однаково распределенных случайных величин. Здесь дается иная, чем в работе [1], характеристика области притяжения закона $\lambda(x)$. Этот результат опубликован в работе [2].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б. В., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Annals of mathematics, vol. 44, № 3, July, 1943, 423—453.

[2] Мейзлер Д. Г., Об одной теореме Б. В. Гнеденко, Сборник Трудов Инст. Мат. АН УССР, № 12, 1949, стр.31—35.

[3] Мейзлер Д. Г., Об одной задаче Б. В. Гнеденко, Укр. Мат. Журн. № 2, 1949, стр. 67—84.

[4] Мейзлер Д. Г., О предельном распределении максимального члена вариационного ряда, ДАН УССР, № 1, 1950, стр. 3—10.

[5] Смирнов Н. В., Математическая статистика, Мат. в СССР за 30 лет, 1948, стр. 728—738.

[6] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.