ДОПОВІДІ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР
1950. № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Г. МЕЙЗЛЕР

ПРО ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ВАРІАЦІЙНОГО РЯДУ

(Представив дійсн. чл. Академії наук Української РСР Б. В. Гнеденко)

1. Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних випадкових величин і $\{F_n(x)\}$ — їх функції розподілу. Приймемо

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функція розподілу максимального члена η_n є

$$\Phi_n(x) = P\{\eta_n < x\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

Ми скажемо, що функція розподілу $\Phi(x)$ належить до класу G, якщо існує така послідовність функцій розподілу $\{F_n(x)\}$ і такі послідовності дійсних чисел $\{a_n\}$ $(a_n > 0)$ і $\{b_n\}$, що

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x + b_n) \tag{1}$$

і для всіх x, для яких $\Phi(x) > 0$, рівномірно відносно i $[1 \leqslant i \leqslant n]$

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n x + b_n) = 1. \tag{2}$$

Наше завдання полягає в тому, щоб знайти характеристичну ознаку розподілів класу G.

Ця задача, що є узагальненням результатів Б. В. Гнеденко [1] на випадок різнорозподілених випадкових величин ξ_n, розв'язана нами при деяких обмеженнях, накладених на нормуючі послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, а саме: ми припускаємо монотонність цих послідовностей та існування границі (власної або невласної) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$.

2. Окремий випадок цієї задачі, коли $b_n = 0$, розглянуто у роботі [2]. В цьому випадку клас граничних законів складається з двох підкласів G^+ і G^-, що не перетинаються; вони визначаються такою теоремою:

Теорема 1 (див. [2], теореми 1 і 2).

Для того щоб функція розподілу $\Phi(x)$ належала до класу G^+ (відповідно G^-), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого α $(0 < \alpha < 1)$

існувала неспадна функція $\varphi_\alpha(x)$ така, щоб для всіх x мало місце рівняння

$$\Phi(x)=\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\cdot\varphi_\alpha(x)$$

(відповідно $\Phi(x)=\Phi(\alpha x)\cdot\varphi_\alpha(x)$) і щоб $\Phi(x)$ була неперервна у точці $x=0$.

Крім того, доведено, що (див. [2], теореми 3—5):

а) функції розподілу класів G^+ і G^- можуть мати щонайбільше одну точку розриву, причому, якщо x_0 є точка розриву, то $\Phi(x_0)=0$ і $\Phi(x)>0$ для $x>x_0$;

б) функції розподілу класів G^+ і G^- не мають інтервалів сталості, крім тих, в яких вони перетворюються на 0 або 1;

в) класи G^+ і G^- замкнені відносно переходу до границі.

Випадок $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=g$ $(|g|<\infty)$ легко звести до попереднього, розглядаючи функцію розподілу $\Phi'(x)=\Phi(x-g)$ і застосовуючи леми Б. В. Гнеденко (див. [1], леми 1 і 2). Таким чином, припустивши існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$, нам залишається розглянути випадок, коли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0. \tag{3}$$

Нехай G^* буде клас функцій розподілу $\Phi(x)$, граничних щодо (1) і (2) при $a_n=a$ $(0<a<\infty)$.

Міркуваннями, аналогічними до тих, що наведені в роботі [2], доводиться така теорема:

Теорема 2. Функція розподілу $\Phi(x)$ належить до класу G^* тоді і лише тоді, коли для будь-якого $\beta>0$ існує неспадна функція $\varphi_\beta(x)$ така, що для всіх x має місце рівняння

$$\Phi(x)=\Phi(x+\beta)\cdot\varphi_\beta(x). \tag{4}$$

Неважко показати, що клас G^* також має властивості, зазначені у пунктах „а“ і „в“.

Ми маємо на меті показати, що у випадку (3), при зроблених раніше припущеннях про нормуючі члени $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, ми не виходимо за границі класу G^*, тому що має місце такий результат:

Теорема. Кожна функція розподілу, гранична щодо (1) і (2), за умови (3) належить до класу G^*.

3. Насамперед відзначимо, що якби $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ $(|b|<\infty)$, то, прийнявши

$$F_n'(x)=F_n(x+b),\quad b_n'=b_n-b,$$

ми можемо обмежитись розглядом випадку, коли $b=0$. З іншого боку, якщо (1), (2), (3) і $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, то в силу монотонності послідовності $\{b_n\}$, починаючи з деякого n має бути $b_n<0$. Дійсно, внаслідок того, що в силу (3) в цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, з (2) випливає, що при $x>0$ і будь-якому i виконується рівняння $F_i(x)=1$ і, отже, при будь-якому $x>0$ і будь-якому n

$$\prod_{i=1}^{n}F_i(x)=1.$$

Припустивши $b_n>0$, ми мали б на увазі (3) при будь-якому ξ, починаючи з деякого m, $a_m\xi+b_m>0$ і внаслідок (5) було б

$$\prod_{i=1}^{n} F_i(a_m\xi+b_m)=1,$$

(де n і m змінюються незалежно один від одного), звідки випливало б $\Phi(x)\equiv 1$.

Нарешті, умова (3) і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$ несумісні, бо ми мали б при будь-якому x і будь-якому i

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n x+b_n)=0$$

і, отже, $\Phi(x)=0$.

З цих міркувань випливає, що ми можемо обмежитися розглядом випадку (3) за умови, що

або $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, $b_n<0$; (I)

або $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$; (II)

або $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. (III)

4. Лема. Якщо дві послідовності дійсних чисел $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ задовольняють умови (3) і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_n}=0, \tag{6}$$

причому або $a_n\geqslant a_{n+1}>0$, $\lim b_n=0$, $b_n<0$; (7)

або $a_n>a_{n+1}>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$; (7′)

або $0<a_n\leqslant a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, (7″)

то, яке б не було $\beta>0$, знайдуться така підпослідовність індексів $\{n_s\}$ і така додатна цілочисельна функція $m_\beta(n)$, що будуть одночасно виконані такі співвідношення:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{b_{n_s+m(n_s)}-b_{n_s}}{a_{n_s}}=\beta \tag{8}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{a_{n_s+m(n_s)}}{a_{n_s}}=1. \tag{9}$$

Доведення леми. Насамперед покажемо існування функції $m_\beta(n)$, для якої

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+m(n)}-b_n}{a_n}=\beta, \tag{10}$$

де β — будь-яке наперед задане додатне число.

Очевидно, досить показати, що які б не були наперед задані додатні числа ε і β ($\beta>\varepsilon$), знайдеться таке $N=N(\varepsilon,\beta)$, що кожному

індексу $n > N$ можна буде поставити у відповідність натуральне число $m = m(n, \beta)$ так, що буде виконана нерівність $\left|\frac{b_{n+m} - b_n}{a_n} - \beta\right| < \xi$.

Виберемо N так, щоб для всіх $n > N$ виконувались нерівності

$$-\frac{b_n}{a_n} > \beta - \varepsilon \tag{11}$$

і

$$\frac{|b_{n+1} - b_n|}{a_n} < \varepsilon, \tag{12}$$

що внаслідок (3), (6) і (7) можна зробити, і нехай $n > N$ — будь-яке натуральне число. Безліч значень p, для яких $\frac{b_{n+p-1} - b_n}{a_n} \leqslant \beta - \varepsilon$ не пусто і внаслідок (7) і (11) обмежено. Визначивши $m = m(n)$, як найбільше з усіх p, що задовольняють останню нерівність, ми будемо мати:

$$\frac{b_{n+m-1} - b_n}{a_n} \leqslant \beta - \varepsilon \tag{13}$$

і

$$\frac{b_{n+m} - b_n}{a_n} > \beta - \varepsilon, \tag{14}$$

причому $m \geqslant 1$. Але внаслідок (12) $\frac{b_{n+m} - b_{n+m-1}}{a_{n+m-1}} < \varepsilon$, звідки внаслідок (7) також $\frac{b_{n+m} - b_{n+m-1}}{a_n} < \xi$, що разом з (13) приводить до нерівності $\frac{b_{n+m} - b_n}{a_n} < \beta$, яка разом з (14) доводить наше припущення.

Покажемо, що для побудованої вище $m_3(n)$ при деякій підпослідовності $\{n_s\}$ буде мати місце (9). Дійсно, припустимо, що останнє невірно і, отже, існує таке $q\,(0 < q < 1)$ і таке N_1, що для всіх $n > N_1$

$$\frac{a_{n+m}}{a_n} < q. \tag{15}$$

З іншого боку, внаслідок (3), (7) і (10) знайдеться таке N_2, що для всіх $n > N_2$

$$\frac{b_n}{a_n} < -\frac{b}{1-q} \tag{16}$$

і

$$\frac{b_{n+m} - b_n}{a_n} < b, \tag{17}$$

де $b > \beta$ — будь-яке число. Візьмемо тепер будь-яке натуральне число $n_0 > \max(N_1, N_2)$ і приймемо

$$n_1 = n_0 + m(n_0), \quad n_s = n_{s-1} + m(n_{s-1}).$$

Тому що $m(n) \geqslant 1$, останнє визначає безконечну послідовність індексів $\{n_s\}$, для якої внаслідок (15) і (17) ми матимемо

$$b_{n_s} - b_{n_{s-1}} < a_{n_0} \cdot bq^{s-1},$$

звідки при будь-якому натуральному k

$$\sum_{s=1}^{k} (b_{n_s} - b_{n_{s-1}}) = b_{n_k} - b_{n_0} < \frac{a_{n_0} \cdot b}{1-q}$$

або

$$\frac{b_{n_k}}{b_n} < \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} + \frac{b}{1-q}, \tag{18}$$

що внаслідок (16) і $\lim\limits_{k \to \infty} b_{n_k} = 0$ неможливо.

За умов (3), (6) і (7′) доведення провадиться таким же шляхом. У цьому випадку (18) приводить до суперечності внаслідок того, що $\lim\limits_{k \to \infty} b_{n_k} = \infty$.

За умов (3), (6) і (7″) внаслідок того, що $\{a_n\}$ неспадна, ми, аналогічно до попереднього, доводимо існування такої $m_\beta(n)$, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_{n+m(n)} - b_n}{a_{n+m(n)}} = \beta$, де β — будь-яке наперед задане додатне число.

Припустивши існування такого $q > 1$, що $\frac{a_{n+m}}{a_n} > 1$, приходимо, для аналогічно побудованої підпослідовності $\{n_s\}$, до співвідношень

$$b_{n_s} - b_{n_{s-1}} < a_{n_s} \cdot b \quad \text{і} \quad a_{n_s} > q a_{n_{s-1}} > a_{n_0} q^s,$$

справедливих при будь-якому натуральному $s \geqslant 1$ і будь-якому $b > \beta$. З цих співвідношень випливає, що при будь-якому натуральному k

$$b_{n_k} - b_{n_0} = \sum_{s=1}^{k} (b_{n_s} - b_{n_{s-1}}) < b \sum_{s=1}^{k} a_{n_s} < b a_{n_k} \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{q^{s-1}} < \frac{a_{n_k} \cdot b}{1-q},$$

звідки

$$\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} < \frac{b_{n_0}}{a_{n_k}} + \frac{b}{1-q} < \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} + \frac{b}{1-q},$$

що внаслідок $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} = \infty$ призводить до суперечності.

5. Доведення теореми. Припустимо, що функція розподілу $\Phi(x)$ гранична щодо (1) і (2), а відповідні нормуючі послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ монотонні і задовольняють умову (3). Через те що кожний невласний закон розподілу належить до класу G^*, ми можемо припустити, що $\Phi(x)$ — власна функція розподілу. Шляхом, аналогічним до доведення леми з [2], легко показати, що виконується співвідношення (6). З іншого боку, в силу показаного у п. 4, ми можемо припустити, що має місце один з випадків (I) — (III). Легко бачити, що в кожному з цих випадків виконані умови леми. Отже, яке б не було $\beta > 0$, знайдеться така підпослідовність індексів $\{n_s\}$, що кожному

з них можна буде поставити у відповідність інший індекс $m_s = m_s(n_s, \beta)$ так, що будуть водночас виконуватися співвідношення (8) і (9). Приймемо

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x + b_n);$$

тоді

$$\Phi_{n_s+m_s}(x) = \prod_{i=1}^{n_s} F_i\left[a_{n_s}\left(\frac{a_{n_s+m_s}}{a_{n_s}}x + \frac{b_{n_s+m_s} - b_{n_s}}{a_{n_s}}\right) + b_{n_s}\right] \times$$

$$\times \prod_{i=n_s+1}^{n_s+m_s} F_i(a_{n_s+m_s}x + b_{n_s+m_s}) =$$

$$= \Phi_{n_s}\left(\frac{a_{n_s+m_s}}{a_{n_s}}x + \frac{b_{n_s+m_s} - b_{n_s}}{a_{n_s}}\right) \cdot \varphi_s(x), \qquad (19)$$

де

$$\varphi_s(x) = \prod_{i=n_s+1}^{n_s+m_s} F_i(a_{n_s+m_s}x + b_{n_s+m_s}).$$

На основі першої теореми Хеллі існує така підпослідовність $\{s_k\}$, що $\lim_{k\to\infty} \varphi_{s_k}(x) = \varphi_\beta(x)$ є деяка неспадна функція. Переходячи до границі в (19) за цією підпослідовністю, ми одержимо на основі леми 2 [1], внаслідок (1), (8) і (9), що в усіх точках неперервності функції $\Phi(x+\beta)$ виконується співвідношення (4). Неважко показати, що в цьому випадку знайдеться і така $\varphi_\beta(x)$, що співвідношення (4) буде мати місце при всіх x і, отже, на основі теореми 2 $\Phi(x)$ належить до класу G^*.

6. Введена нами умова (2) означає, що нормовані випадкові величини $\overline{\xi}_i = \dfrac{\xi_i - b_n}{a_n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — компоненти нормованого максимального члена $\overline{\eta}_n$ — мають бути в деякому розумінні індивідуально знехтуваними в границі, і в питанні щодо граничного розподілу максимального члена ця умова відіграє роль, аналогічну до тієї, яку відіграє вимога безконечної малості доданків у питаннях розшукання граничних розподілів для сум незалежних випадкових величин (див. [3], § 5). За самим характером операції „побудови максимального члена", яка виступає в нашій задачі, визначення знехтування у границі даної індивідуальної компоненти повинно істотно залежати від природи всієї сукупності випадкових величин, які беруть участь у визначенні максимального члена, що нас цікавить. Приймемо

$$\overline{\eta}_n = \max(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_n), \quad \overline{\eta}_n^{(i)} = \max(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_{i-1}, \overline{\xi}_{i+1}, \ldots, \overline{\xi}_n),$$

тоді умова (2) означає, що для умовної ймовірності

$$P\left\{\frac{\overline{\eta}_n < x}{\overline{\eta}_n^{(i)} < x}\right\}$$

рівномірно відносно i виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\overline{\eta}_n < x}{\overline{\eta}_n^{(i)}}\right\} = 1.$$

Введення умови (2) дає можливість природно узагальнити результати Б. В. Гнеденко [1] на випадок різнорозподілених випадкових величин ξ_n. Одержані нами класи G^+, G^- і G^* є аналогами граничних типів розподілу

$$\Phi_\alpha(x),\ \Psi_\alpha(x) \text{ і } \lambda(x)\ [1].$$

На закінчення висловлюю щиру подяку моєму керівникові проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачі і керівництво при її розв'язанні.

Відділ теорії ймовірностей
і математичної статистики
Інституту математики Академії наук
Української РСР

Надійшло до редакції
5.IX 1949 р.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Annals of Mathematics, 44, № 3, 1943.
2. Д. Г. Мейзлер, Украинский математический журнал № 2, 1949, 67—84.
3. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, 1938.

Д. Г. МЕЙЗЛЕР

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

(Представил действ. чл. Академии наук Украинской ССР Б. В. Гнеденко)

Резюме

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин $\{F_n(x)\}$ — их функции распределения. Положим

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Функция распределения максимального члена η_n есть

$$\Phi_n(x) = P\{\eta_n < x\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

Мы скажем, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G, если существует такая последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ и такие последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ и $\{b_n\}$, что

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x + b_n)$$

и для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$, равномерно относительно i $[1 \leqslant i \leqslant n]$

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n x + b_n) = 1 .$$

В работе найден характеристический признак распределений класса G, в предположении монотонности нормирующих последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и существования предела (собственного или несобственного) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$, а также показаны некоторые свойства функций распределения этого класса.