АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК 10
Часть I

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УзССР
ТАШКЕНТ — 1953

Д. Г. Мейзлер

ИЗУЧЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

последовательность независимых случайных величин, подчиненных соответственно законам распределения

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots .$$

Положим

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \; n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда функция распределения максимального члена η_n есть

$$\Phi_n(x) = P\{\eta_n < x\} = \prod_{k=1}^{n} F_k(x).$$

Рассмотрим нормированный максимальный член

$$\overline{\eta}_n = \frac{\eta_n - b_n}{a_n},$$

где $a_n > 0$ и b_n — вещественные константы. Пусть при $n \to \infty$ функция распределения величины $\overline{\eta}_n$

$$\overline{\Phi}_n(x) = \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n)$$

стремится к предельному распределению $\Phi(x)$; требуется найти характеристический признак всех тех распределений $\Phi(x)$, которые могут выступать в только что описанной роли.

Эта задача имеет непосредственный интерес для статистики.

Исчерпывающее ее решение для случая, когда величины ξ_n одинаково распределены, было дано Б. В. Гнеденко [1]. Мы обобщаем результаты Б. В. Гнеденко на случай, когда величины ξ_n разно распределены.

Мы скажем, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G, если существует такая последовательность функций распределения $F_k(x)$ и такие вещественные константы $a_n > 0$ и b_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n) = \Phi(x) \tag{1}$$

для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$ и равномерно относительно к $[1 \leqslant k \leqslant n]$

$$\lim_{n\to\infty} F_k(a_n x + b_n) = 1. \tag{2}$$

Требуется найти характеристический признак законов класса G.

I. Рассмотрим частный случай, а именно, когда константа $a_n = a$, фигурирующая в (1) и (2), не зависит от n. Не ограничивая общности рассуждений, можно положить $a = 1$.

Обозначим через G^* класс распределений, соответствующих этому случаю. Тогда имеет место следующее предложение (см. [5]).

Теорема 1. *Функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^* тогда и только тогда, когда для любого $\beta > 0$ существует неубывающая функция $\varphi_\beta(x)$ такая, что для всех x имеет место равенство*

$$\Phi(x) = \Phi(x+\beta) \cdot \varphi_\beta(x). \tag{3}$$

Положим

$$x_0 = \inf_x E\{\Phi(x) > 0\}, \tag{4}$$

$$y_0 = \sup_x E\{\Phi(x) < 1\} \tag{4'}$$

и назовем функцию распределения $\Phi(x)$ логарифмически выпуклой, если $\ln \Phi(x)$ является выпуклой функцией в промежутке (x_0, ∞) (ср. [3], 4.15).

Теорема 2. *Для того, чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу G^*, необходимо и достаточно, чтобы она была логарифмически выпуклой (сверху). Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы для любых x и y выполнялось соотношение*

$$\Phi(x) \cdot \Phi(y) \leqslant \Phi^2\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^*. По теореме 1, каковы бы ни были x, z и β ($\Phi(x) > 0$, $x < z$, $\beta > 0$), имеем:

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+\beta)} \leqslant \frac{\Phi(z)}{\Phi(z+\beta)}.$$

Положим $z = x + \beta$ и $z + \beta = y$, тогда в силу произвола в выборе $\beta > 0$ мы получаем из этого неравенства необходимость (5) для всех x и y, для которых $x < y$ и $\Phi(x) > 0$.

Доказываемое соотношение (5) симметрично относительно x и y, и для тех x, для которых $\Phi(x) = 0$, оно выполняется тривиальным образом независимо от значений y. Из этого следует необходимость соотношения (5) для всех x и y. Предполагая $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ отличными от нуля, запишем (5) в виде

$$\frac{\ln \Phi(x) + \ln \Phi(y)}{2} \leqslant \ln \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

что доказывает логарифмическую выпуклость функции $\Phi(x)$.

Достаточность. Пусть $\Phi(x)$ — логарифмически выпуклая функция распределения. Так как функция $\Phi(x)$ неубывающая, то, как известно, $\ln \Phi(x)$ непрерывная функция (см. [6], стр. 119). Известно, что если функция $\varphi(x)$ непрерывна и выпукла, то, каковы бы ни были h и h' ($|h'| \leqslant |h|$), имеет место соотношение

$$\varphi(x-h') + \varphi(x+h') \geqslant \varphi(x-h) + \varphi(x+h)$$

(см. [6], стр. 114, теорема 110). Это, очевидно, означает, что приращение функции $\varphi(x)$ на интервале заданной длины не может увеличиваться, когда этот интервал передвигается слева направо. Таким образом, получаем, что для $x < y$ ($\Phi(x) > 0$)

$$\ln \Phi(x+\beta) - \ln \Phi(x) \geqslant \ln \Phi(y+\beta) - \ln \Phi(y).$$

Это соотношение эквивалентно условию (3), и в силу теоремы 1 $\Phi(x)$ принадлежит классу G^*.

Доказанная теорема делает очевидным ряд свойств распределений класса G^*, из которых отметим следующие.

1. Единственно возможной точкой разрыва функции распределения класса G^* является x_0, определенное условием (4).

Действительно, для $x < x_0$ $\Phi(x) = 0$, а для $x > x_0$ функция $\Phi(x)$ непрерывна в силу выпуклости функции $\ln \Phi(x)$. Заметим, что если функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^*, то функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant a, \\ \Phi(x) & \text{для } x > a, \end{cases}$$

где a — вещественное число, также принадлежит классу G^*. Это замечание доказывает существование разрывных законов класса G^* и дает правило их построения *.

2. Законы класса G^* имеют в каждой точке непрерывности левую и правую производную (ср. [6], теорема 111).

3. Законы класса G^* не имеют интервалов постоянства в промежутке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — определены условиями (4) и (4′).

4. Класс G^* замкнут относительно перехода к пределу.

5. Вместе с функцией распределения $\Phi(x)$ все однотипные с ней функции распределения также принадлежат классу G^*.

На основании теоремы 2 легко получить и другого рода характеристики класса G^*. В частности, по аналогии с каноническим представлением законов класса L, данным П. Леви ([7], § 7, теорема 34), можно дать каноническое представление законов класса G^*.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция распределения* $\Phi(x)$ *принадлежала классу* G^*, *необходимо и достаточно, чтобы в промежутке* (x_0, ∞) *она могла быть представлена в виде*

$$\Phi(x) = e^{-\int_x^\infty \psi(t)\,dt}$$

где $\psi(t)$ — *невозрастающая функция, а* x_0 — *число, определенное условием* (4).

Доказательство этого предложения непосредственно вытекает из известной теоремы о том, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции $X(x)$ является возможность ее представления в виде неопределенного интеграла Лебега от невозрастающей функции ([3], 4.141, стр. 74).

В области функций распределения дважды дифференцируемых признак распределений класса G^* формулируется, очевидно, следующим образом ([6], теорема 118).

Теорема 4. *Для того, чтобы дважды дифференцируемая функция распределения* $\Phi(x)$ *принадлежала классу* G^*, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$[\ln \Phi(x)]'' \leqslant 0$$

или, в терминах самой функции распределения, чтобы

$$\Phi''(x)\,\Phi(x) - \Phi'(x)^2 \leqslant 0.$$

* Заметим, что свойство 1 непрерывности законов класса G^* обнаруживает некоторую аналогию со свойством непрерывности и одновершинности законов класса L, доказанным Б. В. Гнеденко [2].

II. Рассмотрим следующий частный случай, когда константа $b_n = b$ не зависит от n. Не ограничивая общности рассуждений, можно положить $b = 0$.

Легко видеть, что в этом случае необходимо, чтобы предельная функция $\Phi(x)$ удовлетворяла одному из соотношений:

$$\Phi(0) = 0 \tag{6}$$

или

$$\Phi(0) = 1. \tag{7}$$

Обозначим через G^+, соответственно G^-, класс тех распределений, соответствующих рассматриваемому случаю, для которых выполняется соотношение (6), соответственно (7).

Имеет место следующее предложение (см. [4]).

Теорема 5. *Для того, чтобы закон распределения* $\Phi(x)$ $(\Phi(x) \neq \varepsilon(x))$* *принадлежал классу* G^+, *соответственно* G^-, *необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в точке* $x = 0$ *и чтобы для любого* $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ *существовала неубывающая функция* $\varphi_\alpha(x)$ *такая, чтобы при всех* x *имело место равенство* 174

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \varphi_\alpha(x),$$

соответственно

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha x)\, \varphi_\alpha(x).$$

На основании этой теоремы легко доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Для того, чтобы функция распределения* $\Phi(x)$ $(\Phi(x) \neq \varepsilon(x))$ *принадлежала классу* G^+, *соответственно* G^-, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\Phi^*(x) = \Phi(e^x)$, *соответственно* $\Phi^*(x) = \Phi(-e^{-x})$, *принадлежала классу* G^*.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция распределения $\Phi(x)$ $(\Phi(x) \neq \varepsilon(x))$ принадлежит классу G^+. Пусть $\beta > 0$ — любое число. Положим $\alpha = e^{-\beta}$. Так как $0 < \alpha < 1$, то по предыдущей теореме найдется неубывающая функция $\varphi_\alpha(x)$ такая, что для всех значений x

$$\Phi(x) = \Phi(e^\beta x)\, \varphi_\alpha(x).$$

В частности, это выполняется для всех $x > 0$. Положим

$$x = e^z, \quad \varphi_\beta^*(z) = \varphi_\alpha(e^z).$$

---

* Через $\varepsilon(x)$ мы обозначаем несобственный закон распределения

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

Тогда из последнего соотношения следует, что для всех z выполняется равенство

$$\Phi^*(z) = \Phi^*(z+\beta)\,\varphi^*_\beta(z),$$

где $\varphi^*_\beta(z)$ — неубывающая функция. Так как, в силу непрерывности функции $\Phi(x)$ в точке $x=0$, $\Phi^*(z)$ есть функция распределения, то на основании теоремы 1 функция $\Phi^*(z) = \Phi(e^z)$ принадлежит классу G^*.

Достаточность. Допустим, что функция распределения $\Phi(x)$ такова, что функция $\Phi^*(x) = \Phi(e^x)$ принадлежит классу G^*. Отсюда прежде всего следует, что $\Phi^*(x)$ есть функция распределения и, следовательно, функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x=0$ и $\Phi(+0)=0$. Пусть $\alpha\,(0<\alpha<1)$ — любое число. Положим $\beta = -\ln\alpha$. По теореме 1 найдется неубывающая функция $\varphi^*_\beta(x)$ такая, что для всех x будет выполняться соотношение

$$\Phi^*(x) = \Phi^*(x-\ln\alpha)\,\varphi^*_\beta(x).$$

Положим

$$x = \ln z,\quad \varphi^*_\beta(\ln z) = \varphi_\alpha(z).$$

Тогда из последнего соотношения следует, что для всех $z>0$

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\cdot\varphi_\alpha(z).$$

Но по доказанному выше $\Phi(+0)=0$, откуда $\Phi\left(\frac{z}{\alpha}\right)=0$ для $z\leqslant 0$ и, следовательно, последнее соотношение выполняется для всех значений z. При этом $\varphi_\alpha(z)$ — неубывающая функция. По теореме 5 функция $\Phi(z)$ принадлежит классу G^+.

Вторая часть теоремы для законов класса G^- доказывается совершенно аналогично.

Эта теорема дает возможность применить результаты п. 1 для получения более обозримых характеристик классов G^+ и G^-. Из теорем 2, 3 и 4 получаем новую теорему.

Теорема 7. *Для того, чтобы функция распределения* $\Phi(x)$ *принадлежала классу* G^+, *соответственно* G^-, *необходимо и достаточно, чтобы функция распределения* $\Phi^*(x) = \Phi(e^x)$, *соответственно* $\Phi^*(x) = \Phi(-e^{-x})$, *была функцией логарифмически выпуклой. Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$\Phi(+0) = 0$$

и для любых неотрицательных чисел x *и* y

$$\Phi(x)\,\Phi(y) \leqslant \Phi^2\left(\sqrt{x\cdot y}\right), \tag{8}$$

соответственно

$$\Phi(-0)=1$$

и для любых неположительных чисел x *и* y

$$\Phi(x)\,\Phi(y)\leqslant\Phi^2\left(-\sqrt{x\cdot y}\right).$$

Теорема 8. *Для того, чтобы функция распределения* $\Phi(x)$ *принадлежала классу* G^+, *соответственно* G^-, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi(+0)=0,$$

соответственно

$$\Phi(-0)=1,$$

и чтобы в промежутке (x_0, ∞), *соответственно* $(x_0, 0)$, *она могла быть представлена в виде*

$$\Phi(x)=e^{-\int\limits_{\ln x}^{\infty}\psi(t)dt},$$

соответственно

$$\Phi(x)=e^{-\int\limits_{-\ln(-x)}^{\infty}\psi(t)dt},$$

где $\psi(t)$ *— невозрастающая функция, а* x_0 *— число, определенное условием* (4).

Теорема 9. *Для того, чтобы дважды дифференцируемая функция распределения* $\Phi(x)$ *принадлежала классу* G^+, *соответственно* G^-, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$[\ln\Phi(e^x)]''\leqslant 0,$$

соответственно

$$[\ln\Phi(-e^{-x})]''\leqslant 0.$$

Ввиду непрерывности функций e^x и e^{-x} и отсутствия у них промежутков постоянства, свойства 1 — 4 законов класса G^* (п. I) сохраняются и для законов класса G^+ и G^-. В силу соотношений (6) и (7), эти классы свойством 5 не обладают, так как они не замкнуты относительно переноса начала координат. Однако имеет место следующее предложение (см. [4]).

Теорема 10. *Пусть* $\Phi(x)$ *— функция распределения класса* G^+, *соответственно* G^-, a *— положительное число. Если* $b>0$, *соответственно* $b>0$ *и* $\Phi(-b)=1$, *то функция распределения*

$$F(x)=\Phi(ax-b)$$

также принадлежит классу G^+, *соответственно* G^-.

Целесообразно расширить классы G^+ и G^- так, чтобы они обладали также свойством 5. Введем следующее определение.

Мы скажем, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу $\overline{G^+}$, соответственно $\overline{G^-}$, если функция распределения

$$\overline{\Phi}(x) = \Phi(x+b), \tag{9}$$

где b — вещественное число, принадлежит классу G^+, соответственно G^-.

Очевидно, классы $\overline{G^+}$ и $\overline{G^-}$ обладают свойством 5.

На основании теоремы 10 легко заключить, что, не ограничивая общности определения класса $\overline{G^-}$, мы можем положить в (9) $b = y_0$, где y_0 определяется условием (4′). Это дает возможность распространить результаты, полученные для класса G^-, на класс $\overline{G^-}$. Формулировка соответствующих результатов для класса $\overline{G^+}$ будет содержать в себе некоторую неопределенность, вызванную неопределенностью фигурирующего в (9) числа b. Однако, с точки зрения рассматриваемого в дальнейшем общего случая, определение соответствующего значения числа b для законов класса $\overline{G^+}$ нам не понадобится ввиду следующей теоремы.

Теорема 11. *Класс $\overline{G^+}$ содержится в классе G^*.*

Доказательство этого предложения очевидно. По теореме 7, если функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+, то для всех неотрицательных значений x и y выполняется соотношение (8), откуда, в силу неравенства $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ и монотонности функции $\Phi(x)$, а также условия (5) и, следовательно, по теореме 2 функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит также классу G^*.

Доказываемое предложение вытекает также из того обстоятельства, что если $\Phi(x)$ — неубывающая функция, $\varphi(x)$ — вогнутая, а $\Phi[\varphi(x)]$ — выпуклая функция, то функция $\Phi(x)$ также выпукла. Так как показательная функция e^x вогнута, то ввиду теорем 2 и 7 класс G^+ содержится в классе G^*.

Так как класс G^* замкнут относительно переноса начала координат, то $\overline{G^+}$ также содержится в классе G^*.

III. Рассматривая общий случай сформулированной задачи, то-есть при совместном варьировании нормирующих постоянных a_n и b_n, приходим к следующему результату.

Теорема 12. *Класс G исчерпывается распределениями классов G^* и $\overline{G^-}$.*

Доказательство этой теоремы громоздко, и мы не станем его приводить. Тем более, что при некоторых довольно общих предположениях регулярности в поведении нормирующих и центрирующих постоянных эта теорема доказана в работе [5].

Эту теорему целесообразно дополнить критерием, который дает возможность по виду данной функции распределения сразу определить ее необходимое место в классе G.

Теорема 13. *Пусть* $\Phi(x)$ — *функция распределения класса* G, y_0 — *число, определенное условием* (4′). *Если* $y_0 = \infty$, *то* $\Phi(x)$ *принадлежит классу* G^*. *Если же* $y_0 < \infty$, *то* $\Phi(x)$ *принадлежит классу* $\overline{G}^-$.

Доказательство первой части теоремы очевидно в силу условия (7), определяющего законы класса G^-.

Пусть теперь функция распределения $\Phi(x)$ класса G^* такова, что $y_0 < \infty$. Покажем, что она принадлежит также классу $\overline{G}^-$. Так как рассматриваемые нами классы замкнуты относительно переноса начала координат, то, не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что $y_0 \leqslant 0$.

Покажем, что функция $\Phi(x)$ принадлежит классу G^-.

Для доказательства допустим, что это неверно. Следовательно, существует такое $\alpha_1\,(0 < \alpha_1 < 1)$ и такие x_1 и $y_1\,(\Phi(x_1) > 0,\ x_1 < y_1 < y_0 \leqslant 0)$, что

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(\alpha_1 x_1)} > \frac{\Phi(y_1)}{\Phi(\alpha_1 y_1)}. \tag{10}$$

Так как функция $\Phi(x)$ принадлежит классу G^*, то по теореме 1 при любом $\beta > 0$

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_1+\beta)} \leqslant \frac{\Phi(y_1)}{\Phi(y_1+\beta)}.$$

Положим

$$\beta = (\alpha_1 - 1)\cdot x_1,$$

тогда из последнего неравенства получим, что

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(\alpha_1 x_1)} \leqslant \frac{\Phi(y_1)}{\Phi[y_1 + (\alpha - 1)x_1]} = \frac{\Phi(y_1)}{\Phi[\alpha_1 y_1 + (\alpha_1 - 1)(x_1 - y_1)]},$$

откуда ввиду (10) мы имели бы также

$$\frac{\Phi(y_1)}{\Phi[\alpha_1 y_1 + (\alpha_1 - 1)(x_1 - y_1)]} > \frac{\Phi(y_1)}{\Phi[\alpha_1 y_1]},$$

что невозможно, так как $(\alpha_1 - 1)(x_1 - y_1) > 0$, а функция $\Phi(x)$ — неубывающая. Этим теорема доказана.

В заключение отметим, что найденные нами классы G^+, G^- и G^* являются довольно естественными аналогами соот-

ветствующих типов, предельных для случая одинаково распределенных слагаемых величин $\Phi_a(x)$, $\Psi_a(x)$ и $\lambda(x)$, найденных Б. В. Гнеденко [1].

Заметим также, что классы G^+, G^- и G^* пересекаются. Их пересечению принадлежит, например, равномерное распределение. Из известного неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

легко заключить, что нормальное распределение принадлежит классу G, а именно, классу G^*.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. Б. В. Гнеденко, которому выражаю свою искреннюю признательность и благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Annals of Mathematics, vol. 44, № 3, July, 1943, 423—453.
2. Гнеденко Б. В. О некоторых свойствах предельных распределений для нормированных сумм. Укр. матем. журн., 1, 1949, стр. 3—8.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
4. Мейзлер Д. Г. Об одной задаче Б. В. Гнеденко. Укр. матем. журн., 2, 1949, стр. 67—84.
5. Мейзлер Д. Г. О предельном распределении максимального члена вариационного ряда. ДАН УССР, 1, 1950, стр. 3—10.
6. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. Гос. изд. ин. лит., 1949.
7. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. ОНТИ, 1938.