НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ ЛЬВОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Выпуск XXX Серия физико-математическая № 1 1955

Д. Г. Мейзлер

О ЧАСТИЧНО ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

последовательность независимых случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Максимальным членом называется случайная величина

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

функция распределения которой $F_n(x)$ имеет вид

$$F_n(x) = P\{\eta_n < x\} = F^n(x).$$

Мы скажем, что закон распределения $\Phi(x)$ имеет область частичного притяжения, если существует такая последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин ξ_n, что для некоторой последовательности индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ при надлежащем подборе постоянных $a_k (a_k > 0)$ и b_k функции распределения нормированных максимальных членов

$$\overline{\eta}_{n_k} = \frac{\eta_{n_k} - b_k}{a_k}$$

сходятся к закону $\Phi(x)$, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} F^{n_k}(a_k x + b_k) = \Phi(x). \tag{1}$$

О функции распределения $F(x)$ величин ξ_n мы в этом случае скажем, что она частично притягивается к закону $\Phi(x)$ или что она принадлежит его области частичного притяжения.

Если при этом последовательность индексов n_k удовлетворяет условию

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} = r, \tag{2}$$

то число r будем называть рангом частичного притяжения предельного закона $\Phi(x)$, а о последнем скажем, что он имеет область частичного притяжения ранга r. Очевидно, всегда $0 \leqslant r \leqslant 1$.

В настоящей работе исследуется класс законов распределения, которые могут быть предельными в только что описанном смысле.

Для краткости формулировок доказываемых теорем предельные законы распределения предполагаются собственными, хотя большая часть приведенных выводов справедлива и в отношении несобственных законов распределения ([4], § 1).

Левым, соответственно правым, крайним числом распределения $\Phi(x)$ условимся называть (и постоянно обозначать буквами x_0 и y_0) числа, определяемые соотношениями

$$x_0 = \inf_x \{\Phi(x) > 0\}, \quad y_0 = \sup_x E\{\Phi(x) < 1\}.$$

I. ***Теорема 1.*** Каждый закон распределения имеет область частичного притяжения.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — закон распределения, x_0 — его левое крайнее число. Рассмотрим два случая: 1) $x_0 > -\infty$ и 2) $x_0 = -\infty$.

1) В случае $x_0 > -\infty$ можно, не ограничивая общности рассуждений, предположить $x_0 = 0$.

Пусть c_k — произвольная последовательность положительных чисел, монотонно стремящихся к нулю. Определим последовательность вспомогательных функций распределения

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \Phi(c_k) & \text{при } 0 < x < c_k, \\ \Phi(x) & \text{при } x > c_k. \end{cases} \tag{3}$$

Возьмем произвольные две последовательности натуральных n_k и положительных a_k чисел, возрастающих монотонно столь быстро, что

$$\lim_{\kappa \to \infty} n_\kappa \sum_{i=\kappa+1}^{\infty} \frac{1}{n_i} \ln \Phi(c_i) = 0 \tag{4}$$

и

$$\lim_{\kappa \to \infty} n_k \ln \Phi\left(\frac{a_k}{a_{k-1}} c_k\right) = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \ln F_k\left(\frac{x}{a_k}\right).$$

Ввиду (3) при $x > 0$

$$\frac{1}{n_k}\left|\ln F_k\left(\frac{x}{a_k}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n_k}\left|\ln \Phi(c_k)\right|,$$

откуда ввиду (4) следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно для $0 \leqslant x < \infty$. Положим

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \ln F_k\left(\frac{x}{a_k}\right)} = \prod\limits_{\kappa=1}^{\infty} F_k^{\frac{1}{n_k}}\left(\frac{x}{a_k}\right) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Так как в наших условиях допускается предельный переход под знаком суммы, то

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = e^{\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \lim\limits_{x\to\infty} \ln F_k\left(\frac{x}{a_k}\right)} = 1,$$

и, следовательно, $F(x)$ есть функция распределения.

Покажем, что функция $F(x)$ принадлежит области частичного притяжения закона $\Phi(x)$. Для этого рассмотрим выражение

$$F^{n_k}(a_k x) = \left\{\prod_{i=1}^{\infty} F_i^{\frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_\kappa}{a_i} x\right)\right\}^{n_k} =$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{\kappa-1} F_i^{\frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_k}{a_i} x\right)\right\}^{n_k} \cdot \left\{F_k^{\frac{1}{n_\kappa}}\left(\frac{a_k}{a_k} x\right)\right\}^{n_k} \cdot \left\{\prod_{i=\kappa+1}^{\infty} F_i^{\frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_k}{a_i} x\right)\right\}^{n_k}.$$

Для каждого значения $x > 0$ имеем:

А.

$$L_1 = \lim_{\kappa\to\infty}\left\{\prod_{i=1}^{\kappa-1} F_i^{\frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_k}{a_i} x\right)\right\}^{n_k} \geqslant \lim_{\kappa\to\infty}\left\{\prod_{i=1}^{\kappa-1} F_i^{\frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_k}{a_{\kappa-1}} x\right)\right\}^{n_k}.$$

Так как $F_k(x) \underset{\kappa+1}{\geqslant} F(x)$, то

$$L_1 \geqslant \lim_{\kappa\to\infty}\left\{F_k^{\sum\limits_{i=1}^{\kappa-1} \frac{1}{n_i}}\left(\frac{a_k}{a_{\kappa-1}} x\right)\right\}^{n_k}.$$

Ввиду $c_k \to 0\,(k \to \infty)$, каково бы ни было $x > 0$, начиная с некоторого значения k, будем иметь неравенство

$$x > c_k, \tag{6}$$

а поэтому и ввиду (3)

$$L_1 \geqslant \lim_{\kappa \to \infty} \left\{ \Phi^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}} \left(\frac{a_\kappa}{a_{\kappa-1}} c_\kappa \right)^{n_k} \right.$$

Ввиду (4) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ сходится, откуда ввиду (5)

$$L_1 = 1.$$

B.

$$L_2 = \lim_{\kappa \to \infty} \left\{ F_k^{\frac{1}{n_\kappa}} \left(\frac{a_k}{a_k} x \right) \right\}^{n_\kappa} = \lim_{\kappa \to \infty} F_k(x),$$

откуда на основании (3) и (6) получаем

$$L_2 = \Phi(x).$$

C.

$$L_3 = \lim_{\kappa \to \infty} \left\{ \prod_{i=\kappa+1}^{\infty} F_i^{\frac{1}{n_i}} \left(\frac{a_k}{a_i} x \right) \right\}^{n_k} \geqslant \lim_{\kappa \to \infty} \left\{ \prod_{i=\kappa+1}^{\infty} F_i^{\frac{1}{n_i}} (c_i) \right\}^{n_k} =$$

$$= \lim_{\kappa \to \infty} \left\{ \prod_{i=\kappa+1}^{\infty} \Phi^{\frac{1}{n_i}} (c_i) \right\}^{n_k},$$

откуда на основании (4) следует

$$L_3 = 1.$$

Таким образом, мы имеем для всех значений $x > 0$

$$\lim_{\kappa \to \infty} F^{n_k}(a_k x) = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \Phi(x).$$

Так как для значений $x < 0$

$$F(x) = \Phi(x) = 0,$$

то имеет место соотношение (1), и, следовательно, функция $F(x)$ принадлежит области частичного притяжения закона $\Phi(x)$.

2) Допустим теперь, что $x_0 = -\infty$, и рассмотрим вспомогательную функцию распределения

$$\overline{\Phi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \Phi(\ln x) & \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad (7)$$

левое крайнее число которой $\overline{x_0} = 0$. Для этой функции справедливы выводы рассмотренного случая 1).

По доказанному существует функция распределения $\overline{F}(x)$ и последовательности натуральных n_κ и положительных a_κ чисел такие, что

$$\lim_{\kappa \to \infty} \overline{F}^{n_\kappa}(a_\kappa x) = \overline{\Phi}(x). \tag{8}$$

Положим

$$F(x) = \overline{F}(e^x), \qquad b_\kappa = \ln a_\kappa,$$

тогда

$$F^{n_\kappa}(x + b_\kappa) = \overline{F}^{n_\kappa}(e^{x+\ln a_\kappa}) = \overline{F}(a_\kappa e^x).$$

Но ввиду (7) и (8)

$$\lim_{\kappa \to \infty} \overline{F}^{n_\kappa}(a_\kappa e^x) = \overline{\Phi}(e^x) = \Phi(x),$$

откуда также

$$\lim_{\kappa \to \infty} F^{n_\kappa}(x + b_\kappa) = \Phi(x),$$

что доказывает справедливость теоремы.

Пример. Области частичного притяжения равномерного закона распределения

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1, \end{cases}$$

принадлежит, например, функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i^{2i}}} & \text{при } 0 < x < 1, \\ e^{\frac{\ln x - \ln \kappa!}{\kappa^{2\kappa}} - \sum_{i=\kappa+1}^{\infty} \frac{\ln i}{i^{2i}}} & \text{при } (k-1)! < x < k!, \\ & k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Для того, чтобы выполнялось соотношение (1), можно принять $a_k = k!$, $n_k = k^{2k}$.

II. По аналогии с теорией предельных распределений для сумм независимых случайных величин вопрос о существовании

законов, не принадлежащих области частичного притяжения никакого собственного типа, и здесь решается положительно. Примером такого закона может служить функция распределения

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-\dfrac{1}{\ln(x+e)} & \text{при } x>0,\end{cases}$$

приведенная А. Я. Хинчиным ([4], § 15) для выяснения аналогичного вопроса в области сумм. Имеем

$$H^{n_k}(a_kx+b_k)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-\dfrac{b_k}{a_k},\\ \left[1-\dfrac{1}{\ln(a_kx+b_k+e)}\right]^{n_k} & \text{при } x>-\dfrac{b_k}{a_k}.\end{cases}$$

Допустим, что при некотором подборе чисел n_k, a_k и b_k существует предел

$$h(x)=\lim_{k\to\infty}H^{n_k}(a_kx+b_k).$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить наличие пределов

$$\lim_{k\to\infty}a_k=a,\quad \lim_{k\to\infty}b_k=b,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_k}=l,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{\ln a_k}=\alpha,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{\ln b_k}=\beta.$$

Рассмотрим три случая:

1) $l=-\infty$. В этом случае, очевидно, $h(x)\equiv 0$.

2) $|l|<\infty$. Имеем

$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<l,\\ e^{-\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{\ln(a_kx+b_k+e)}} & \text{при } x>l,\end{cases}$$

откуда вытекает, что либо $h(x)\equiv 0$, либо $a=\infty$. Но при $a=\infty$, для $x>l$

$$\ln h(x) = -\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k}{\ln a_k}}{1+\frac{\ln\left(x+\frac{b_k}{a_k}+\frac{e}{a_k}\right)}{\ln a_k}} = -\alpha,$$

и, следовательно,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < l, \\ e^{-\alpha} & \text{при } x > l \end{cases}$$

несобственная функция распределения.

3). $l = \infty$. В этом случае для всех значений x

$$h(x) = e^{-\lim\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{\ln(a_k x + b_k + e)}},$$

откуда следует, что либо $h(x) \equiv 0$, либо $b = \infty$. Но при $b = \infty$

$$\ln h(x) = -\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k}{\ln b_k}}{1+\frac{\ln\left(\frac{a_k}{b_k}x+\frac{e}{b_k}+1\right)}{\ln b_k}} = -\beta$$

для всех значений x, и, следовательно, $h(x)$ — несобственная функция распределения.

Заметим, что аналогом безгранично делимых законов, изучаемых в теории предельных распределений для сумм, является в теории предельных распределений для максимального члена весь класс функций распределения. Это вытекает из того обстоятельства, что вместе с функцией $\Phi(x)$ функция $\Phi^p(x)$ также является функцией распределения при любом $p > 0$. Теорема 1 индуцирована соответствующим результатом А. Я. Хинчина в области предельных распределений для сумм ([4], теорема 46).

III. На основании теоремы 1 и используемого при ее доказательстве соотношения (4) можно лишь утверждать, что каждый закон распределения имеет область частичного притяжения нулевого ранга.

Теорема 2. Для того, чтобы закон распределения $\Phi(x)$ имел область частичного притяжения положительного ранга r $(0 < r < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы законы распределения $\Phi(x)$ и $\Phi^r(x)$ были однотипны: иными словами, необходимо и достаточно, чтобы нашлись две постоянные $\alpha = \alpha(r)$

и $\beta = \beta(r)$ такие, чтобы при всех значениях x (x и $\alpha x + \beta$ точки непрерывности функции $\Phi(x)$), выполнялось равенство

$$\Phi^{\frac{1}{r}}(\alpha x + \beta) = \Phi(x). \tag{9}$$

Доказательство. Допустим, что закон распределения $\Phi(x)$ имеет область частичного притяжения ранга $r (0 < r < 1)$. Тогда найдется такая функция $F(x)$, что при надлежащем подборе постоянных $a_k > 0$ и b_k и некоторой последовательности индексов n_k, удовлетворяющей условию (2), будет иметь место соотношение (1). Записав его в виде

$$\lim_{k \to \infty} \left\{ F^{n_k}(a_{k+1}x + b_{k+1}) \right\}^{\frac{n_{k+1}}{n_k}} = \Phi(x)$$

и применяя известную теорему А. Я. Хинчина ([4], теорема 43), приходим к необходимости соотношения (9).

Допустим, обратно, что закон распределения $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (9), где $0 < r < 1$. n-кратное его повторение приводит к более общему соотношению

$$\Phi^{\frac{1}{r^n}}[\alpha^n x + \beta(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1})] = \Phi(x), \tag{10}$$

справедливому для любого натурального числа n. Положим

$$F(x) = \Phi(x), \quad a_k = \alpha^k, \quad b_k = \beta(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1}),$$

$$n_k = \left[\frac{1}{r^k} \right],$$

тогда (10) запишется в виде

$$F^{n_k}(a_k x + b_k) \cdot F^{\frac{1}{r^k} - n_k}(a_k x + b_k) = \Phi(x). \tag{11}$$

Из (10) видно, что для всех значений x, для которых $\Phi(x) > 0$,

$$\lim_{k \to \infty} F(a_k x + b_k) = \lim_{k \to \infty} \Phi[\alpha^k x + \beta(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1})] = 1,$$

и так как $\frac{1}{r^k} - n_k < 1$, то

$$F^{\frac{1}{r^k} - n_k}(a_k x + b_k) \geqslant F(a_k x + b_k),$$

ввиду чего для всех значений x, для которых $\Phi(x) > 0$

$$\lim_{k \to \infty} F^{\frac{1}{r^k} - n_k}(a_k x + b_k) = 1.$$

Последнее соотношение вместе с (11) приводит к соотношению (1).

Так как определенная нами последовательность n_κ удовлетворяет условию (2), то этим достаточность признака (9) доказана.

Следствие 1. Если закон распределения $\Phi(x)$ имеет область частичного притяжения ранга r, то этим же свойством обладает всякий закон вида $\Phi^p(x)$, где $p > 0$.

Следствие 2. Если закон распределения $\Phi(x)$ имеет область частичного притяжения положительного ранга, то его области частичного притяжения принадлежат все законы вида $\Phi^p(x)$, где $p > 0$.

Последнее вытекает из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы.

Примеры.

1. Положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-\frac{1 - \frac{2\pi}{\ln r} + \sin(2\pi \log_{\frac{1}{r}} x)}{x}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где r — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Легко проверить тождество

$$\Phi^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{r}x\right) = \Phi(x).$$

Таким образом, наша функция распределения удовлетворяет условию (9), где $\alpha = \frac{1}{r}$, $\beta = 0$ и, следовательно, имеет область частичного притяжения ранга r. Соотношения (1) и (2) будут выполняться, если положить, например,

$$F(x) = \Phi(x), \quad n_\kappa = [r^{-\kappa}], \quad a_\kappa = r^{-\kappa}, \quad b_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots).$$

2. Функция распределения

$$\Phi(x) = e^{-e^{-x + \cos x}}$$

удовлетворяет условию (9), так как имеет место тождество

$$\Phi^{e^{2\pi}}(x + 2\pi) = \Phi(x).$$

Здесь $r = e^{-2\pi}$, $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi$.

Примером разрывной функции распределения, имеющей область частичного притяжения положительного ранга, является функция

$$\Phi(x) = e^{-e^{-[x]}},$$

для которой во всех точках ее непрерывности выполняется соотношение

$$\Phi(x) = \Phi^e(x+1).$$

IV. Предельные типы распределений для максимального члена $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ и $\lambda(x)$, найденные Б. В. Гнеденко [1], имеют, очевидно, область частичного притяжения ранга $r=1$ (как и всякого ранга r, поскольку из натурального ряда можно выделить подпоследовательность, для которой условие (2) выполняется при любом заданном значении $0 \leqslant r \leqslant 1$). Покажем, что в этом смысле эти три предельных типа являются единственными.

Теорема 3. Область частичного притяжения ранга $r=1$ имеют только законы $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ и $\lambda(x)$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого закона $\Phi(x)$ выполняются соотношения (1) и (2), где $r=1$. Тогда, каково бы ни было число $r(0<r<1)$, найдется такая целочисленная функция индекса κ $m_r(\kappa)=m(\kappa)$, для которой

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{n_{\kappa+m(\kappa)}}{n_\kappa} = \frac{1}{r}.$$

Ввиду (2) имеем

$$\lim_{\kappa\to\infty} F^{n_{\kappa+m(\kappa)}}(a_{\kappa+m(\kappa)}x + b_{\kappa+m(\kappa)}) =$$

$$= \lim_{\kappa\to\infty} \left\{ F^{n_\kappa}(a_{\kappa+m(\kappa)}x + b_{\kappa+m(\kappa)}) \right\}^{\frac{n_{\kappa+m(\kappa)}}{n_\kappa}} = \Phi(x),$$

что на основании упомянутой теоремы А. Я. Хинчина приводит к необходимости условия (9). Так как последнее должно выполняться для любого значения r, то мы приходим к тому функциональному уравнению, которое было найдено Б. В. Гнеденко [1] и единственным решением которого в области собственных функций распределения является класс предельных типов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ и $\lambda(x)$.

Теорема 4. 1. Для того, чтобы тип распределения $\Phi(x)$ был одним из предельных типов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ или $\lambda(x)$, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы он имел области ча-

стичного притяжения двух рангов, логарифмы которых несоизмеримы.

2. Если тип распределения $\Phi(x)$, имеющий область частичного притяжения положительного ранга, не является одним из предельных типов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ или $\lambda(x)$, то множество его положительных рангов частичного притяжения совпадает с множеством чисел r вида

$$r = r_0^m \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

где $r_0\,(0 < r_0 < 1)$ — максимальный ранг частичного притяжения типа $\Phi(x)$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть E — множество положительных чисел κ, обладающее следующими свойствами:

а) если $\kappa_1 \in E$ и $\kappa_2 \in E$, то также $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \in E$;

б) если $\kappa_n \in E\,(n = 1, 2, \ldots)$ и $\kappa_n \to \overline{\kappa} > 0\,(n \to \infty)$, то также $\overline{\kappa} \in E$.

Для всякого множества такой структуры справедливы следующие предложения:

1. Если множество E содержит два числа, логарифмы которых несоизмеримы, то оно совпадает с множеством всех положительных чисел.

2. Если множество E, содержащее по крайней мере одно число, отличное от единицы, не совпадает с множеством всех положительных чисел, то найдется в E такое число κ_0, что E совпадает с множеством всех чисел κ вида

$$\kappa = \kappa_0^m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что в силу свойства а) всякое непустое множество рассматриваемого нами типа содержит единицу, и, следовательно, вместе с числом κ ему принадлежат все числа вида κ^n, где n — произвольное целое число, а вместе с числами κ_1 и κ_2 ему принадлежат все числа вида $\kappa = \frac{\kappa_1^p}{\kappa_2^q}$, где p и q — произвольные целые числа.

1. Допустим, что множество E содержит два числа κ_1 и κ_2 такие, что

$$\Theta = \frac{\ln \kappa_1}{\ln \kappa_2}$$

иррациональное число. Пусть a — произвольное положительное число. Покажем, что $a \in E$.

Поскольку условие иррациональности числа θ не нарушит-

ся, если числа κ_1 и κ_2 заменить их целыми степенями (положительными или отрицательными), то на основании сделанных выше замечаний мы можем, не ограничивая общности наших рассуждений, предположить, что

$$\kappa_1 > 1 \text{ и } 1 < a < \kappa_2. \tag{12}$$

Рассмотрим множество чисел x_n вида

$$x_n = n\theta - [n \cdot \theta] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как θ — иррациональное число, то, как известно ([3], ч. 1, гл. II, № 166 и 170), это множество всюду плотно в промежутке [0,1]. Ввиду (12) найдется такая целочисленная функция $m,(n\,a) = m_1(n)$, что

$$m_1(n) \cdot \theta - [m_1(n) \cdot \theta] \to \log_{\kappa_2} a \qquad (n \to \infty),$$

т. е.

$$m_1(n) \ln \kappa_1 - [m_1(n) \cdot \theta] \ln \kappa_2 \to \log_{\kappa_2} a \cdot \ln \kappa_2 \quad (n \to \infty).$$

Положив $[m_1(n) \cdot \theta] = m_2(n)$, последнее соотношение запишется в виде

$$m_1(n) \ln \kappa_1 - m_2(n) \ln \kappa_2 \to \ln a \qquad (n \to \infty)$$

или

$$a_n = \frac{\kappa_1^{m_1(n)}}{\kappa_2^{m_2(n)}} \to a \qquad (n \to \infty).$$

Так как $m_1(n)$ и $m_2(n)$ — целые числа, то последовательность a_n принадлежит нашему множеству E, откуда в силу свойства *б*) вытекает, что также $a \in E$.

2. Допустим теперь, что множество E содержит по крайней мере одно число, отличное от единицы, но не содержит всех положительных чисел. Положим

$$\kappa_0 = \max_{\kappa \in E,\ \kappa < 1} \kappa.$$

Покажем, что такое число существует. Для этого достаточно показать, что единица не является предельной точкой множества E. Действительно, допустим, что в множестве E существует последовательность чисел $\kappa_n \to 1\ (n \to \infty)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что $\kappa_n < 1\ (n = 1, 2, \ldots)$. Тогда, каково бы ни было число $a\,(0 < a < 1)$, найдется такая целочисленная функция индекса $m = m(n, a)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \kappa_n^m = a.$$

Так как последовательность κ_n^m также принадлежит множеству E, то ввиду свойств *а*) и *б*) множество E содержало бы все положительные числа, что противоречит условию этой части леммы.

Поскольку $\kappa_0 \in E$, то E содержит также все числа κ вида

$$\kappa = \kappa_0^m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Покажем, что других чисел в множестве E не имеется. Действительно, допустим,, что в множестве E содержится число $\kappa = \kappa_0^{m+\alpha}$, где m — целое число, $0 < \alpha < 1$. Тогда в силу свойства *а*) множества E число κ_0^{α} также принадлежало бы множеству E, что ввиду $\kappa_0 < \kappa_0^{\alpha} < 1$ и определения числа κ_0 невозможно.

Доказанной лемме можно, очевидно, придать и такую формулировку. Пусть $R(\kappa)$ — некоторое соотношение, зависящее от положительного параметра κ, следующей структуры:

а) Если $R(\kappa)$ выполняется для двух значений $\kappa = \kappa_1$ и $\kappa = \kappa_2$, то $R(\kappa)$ выполняется также для $\kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$.

б) Если $R(\kappa)$ выполняется для некоторой последовательности значений $\kappa_n \to \overline{\kappa} > 0$ $(n \to \infty)$, то $R(\kappa)$ выполняется также для $\kappa = \overline{\kappa}$.

Тогда:

1. если $R(\kappa)$ выполняется для двух значений параметра κ, логарифмы которых несоизмеримы, то оно выполняется для всех значений κ;

2. если $R(\kappa)$ выполняется по крайней мере для одного значения $\kappa \neq 1$, но не для всех значений $\kappa > 0$, то найдется такое κ_0, что $R(\kappa)$ выполняется для всех значений κ вида

$$\kappa = \kappa_0^m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и только для этих значений.

Доказательство теоремы 4. На основании теоремы 2 и леммы достаточно показать, что соотношение (9) обладает относительно параметра r свойствами *а*) и *б*), сформулированными в лемме.

Допустим, что соотношение (9) выполняется для двух значений $r = r_1$ и $r = r_2$, т. е. существуют такие постоянные α_1, β_1, α_2 и β_2, что для всех значений x

$$\Phi^{\frac{1}{r_1}}(\alpha_1 x + \beta_1) = \Phi(x) \tag{13}$$

и

$$\Phi^{\frac{1}{r_2}}(\alpha_2 x + \beta_2) = \Phi(x). \tag{14}$$

Положим в (13) $x=\frac{x-\beta_2}{\alpha_2}$, тогда

$$\Phi^{\frac{1}{r_1}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2+\beta_1\right)=\Phi\left(\frac{x-\beta_2}{\alpha_2}\right),$$

откуда, ввиду (14), также

$$\Phi^{\frac{1}{r_1}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2+\beta_1\right)=\Phi^{\frac{1}{r_2}}(x).$$

Положив

$$r'=\frac{r_1}{r_2},\quad \alpha'=\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\quad \beta'=\beta_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2,$$

получаем для всех значений x

$$\Phi^{\frac{1}{r'}}(\alpha'x+\beta')=\Phi(x),$$

и, следовательно, соотношение (9) обладает свойством *а*).

Допустим теперь, что соотношение (9) выполняется для некоторой последовательности значений $r=r_n\,(n=1, 2, \ldots)$, где $r_n\to\overline{r}>0\,(n\to\infty)$. Существуют, следовательно, две последовательности постоянных α_n и β_n таких, что для всех значений x

$$\Phi^{\frac{1}{r_n}}(\alpha_n x+\beta_n)=\Phi(x)\qquad (n=1, 2, \ldots)$$

или, что то же,

$$\Phi(\alpha_n x+\beta_n)=\Phi^{r_n}(x)\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как закон распределения $\Phi(x)$ предполагается собственным, то, переходя к пределу и применяя теорему А. Я. Хинчина ([4], теорема 43), получаем, что пределы

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\overline{\alpha}\ \text{ и }\ \lim_{n\to\infty}\beta_n=\overline{\beta}$$

существуют, причем

$$0<\overline{\alpha}<\infty,\quad -\infty<\overline{\beta}<\infty,$$

и для всех значений x

$$\Phi^{\frac{1}{\overline{r}}}(\overline{\alpha}x+\overline{\beta})=\Phi(x).$$

Таким образом, соотношение (9) обладает свойством *б*).

Заметим, что доказанная лемма находит себе применение

и в других вопросах теории предельных распределений для максимального члена вариационного ряда. В частности, характеристические признаки областей притяжения законов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ [1] и $\lambda(x)$ [2] выражаются соотношениями, удовлетворяющими условиям *а*) и *б*) леммы. Это дает возможность уточнить эти условия в смысле их достаточности. Так, например, для того, чтобы закон распределения $F(x)$ принадлежал области притяжения типа $\Phi_\alpha(x)$, достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-F(x)}{1-F(\kappa x)}=\kappa^{\alpha}$$

выполнялось для двух значений κ, логарифмы которых несоизмеримы.

V. Пусть n_κ — последовательность натуральных чисел, для которой имеет место соотношение (2). Тогда для всякой ее подпоследовательности вида

$$n'_\kappa = n_{p+\kappa_0},$$

где $p>0$ и $\kappa_0\geqslant 0$ — целые числа, будем иметь

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{n'_\kappa}{n'_{\kappa+1}}=r^p.$$

Очевидно, если функция распределения $F(x)$ принадлежит области частичного притяжения максимального ранга закона $\Phi(x)$, то она принадлежит также его области частичного притяжения всех рангов. Приводимая ниже теорема 5 показывает, что и обратно всякое предельное представление закона $\Phi(x)$ в виде (1) при условии (2) можно рассматривать, как подпоследовательность некоторой последовательности максимального ранга. Таким образом, максимальный ранг частичного притяжения является своего рода мерой «плотности» частичного притяжения, причем эта мера определяется лишь природой предельного закона $\Phi(x)$, сохраняя одно и то же значение для всех функций $F(x)$, притягивающихся с положительным рангом к закону $\Phi(x)$.

Теорема 5. Пусть для некоторой функции распределения $\Phi(x)$, максимальный ранг частичного притяжения которой равен $r_0\,(0<r_0<1)$, выполняются соотношения (1) и (2), где $0<r<r_0$. Тогда найдется такая последовательность $\bar{n}_\kappa$ и такие постоянные $\bar{a}_\kappa$ и $\bar{b}_k$, что будет иметь место также соотношение

$$\lim_{\kappa\to\infty}F^{\bar{n}_\kappa}(\bar{a}_\kappa x+\bar{b}_\kappa)=\Phi(x), \tag{15}$$

причем

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\overline{n}_\kappa}{n_{\kappa+1}}=r_0. \tag{16}$$

Доказательство. В силу доказанного во второй части теоремы 4

$$r=r_0{}^m,$$

где m — некоторое натуральное число. Положив

$$n_\kappa^{(i)}=[r_0^{m-i}\cdot n_\kappa],\qquad i=1,2,\ldots,m,$$

получаем m последовательностей $n_\kappa^{(i)}$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{n_\kappa^{(i)}}{n_\kappa}=r_0{}^{m-i},\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{17}$$

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{n_\kappa^{(i)}}{n_\kappa^{(i+1)}}=r_0,\quad i=1,2,\ldots,m-1 \tag{18}$$

и

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{n_\kappa^{(m)}}{n_{\kappa+1}^{(1)}}=r_0. \tag{19}$$

Ввиду (1) и (17) будем иметь

$$\lim_{\kappa\to\infty}F^{n_\kappa^{(i)}}(a_\kappa x+b_\kappa)=\Phi^{r_0^{m-i}}(x),\ i=1,2,\ldots,m. \tag{20}$$

По условию, максимальный ранг частичного притяжения закона $\Phi(x)$ равен $r_0(r_0>0)$, а поэтому на основании теоремы 2 найдутся такие постоянные α_0 и β_0, что для всех значений x будем иметь равенство

$$\Phi^{r_0}(x)=\Phi(\alpha_0 x+\beta),$$

откуда также

$$\Phi^{r_0^{m-i}}(x)=\Phi\left[\alpha_0^{m-i}x+\beta_0(1+\alpha_0+\ldots+\alpha_0{}^{m-i-1})\right] \tag{21}$$

$$i=1,2,\ldots,m-1.$$

Положив

$$a_\kappa^{(i)}=\frac{a_\kappa}{\alpha_0^{m-i}},\quad b_\kappa^{(i)}=\frac{b_\kappa\alpha_0^{m-i}-\beta_0(1+\alpha_0+\ldots+\alpha_0{}^{m-i-1})}{\alpha_0{}^{m-i}},$$

$$i=1,2,\ldots,m-1,$$

$$a_\kappa^{(m)}=a_\kappa,\quad b_\kappa^{(m)}=b_m,$$

мы получим m последовательностей, каждая из которых схо-

дится к закону $\Phi(x)$, так как ввиду (20) и (21) имеют место соотношения

$$\lim_{\kappa\to\infty} F^{n_\kappa^{(i)}}\left(a_\kappa^{(i)}x+b_\kappa^{(i)}\right)=\Phi(x),\quad i=1,2,\ldots,m. \tag{22}$$

Ввиду (18) и (19) для каждого значения κ (начиная с некоторого)

$$n_\kappa^{(1)}<n_\kappa^{(2)}<\ldots<n_\kappa^{(m)}<n_{\kappa+1}^{(1)}.$$

Объединим последовательности $n_\kappa^{(i)}$ в одну монотонно упорядоченную последовательность $\overline{n}_\kappa$, и пусть $\overline{a}_\kappa$ и $\overline{b}_\kappa$ — те из постоянных $a_\kappa^{(i)}$ и $b_\kappa^{(i)}$, которые входят вместе с показателями $\overline{n}_\kappa$ в один и тот же элемент последовательности (22). Для таким образом определенных последовательностей чисел $\overline{n}_\kappa$, $\overline{a}_\kappa$ и $\overline{b}_\kappa$ будет, очевидно, выполняться соотношение (15) и, ввиду (18) и (19), также (16).

Доказанную теорему можно сформулировать также следующим образом: если закон распределения не является одним из предельных типов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ или $\lambda(x)$, то его область частичного притяжения одна и та же для всех положительных рангов частичного притяжения.

VI. Пусть закон распределения $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (9) при некотором значении $r(0<r<1)$. Рассмотрим три случая в зависимости от значения параметра α, входящего в (9):

1). $\alpha=1$, 2). $\alpha>1$ и 3). $\alpha<1$.

На основании второй части теоремы 4 легко заключить, что если для данной функции распределения при некотором значении r имеет место один из указанных случаев, то тот же случай будет осуществляться и для всех значений r, для которых выполняется условие (9). Таким образом, вся совокупность рассматриваемых нами законов распределения разбивается на три не пересекающиеся класса, которые, для краткости дальнейших формулировок, назовем λ_r, Φ_r и Ψ_r, соответственно случаям 1), 2) и 3).

Рассуждения Б. В. Гнеденко, проводимые в отношении функционального уравнения законов $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ и $\lambda(x)$ ([1], § 2), частично применимы и к нашему более общему уравнению (9). Легко видеть, что необходимо в случае

$$\begin{aligned}
&1).\ x_0=-\infty,\ y_0=\infty,\\
&2).\ x_0>-\infty,\ y_0=\infty,\\
&3).\ x_0=-\infty,\ y_0<\infty,
\end{aligned} \tag{23}$$

где x_0 и y_0 — крайние числа закона $\Phi(x)$. При этом, так как в случае 2), соответственно 3), $x_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$, соответственно $y_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$, то соответствующим образом центрированные законы $\overline{\Phi}(x)$ классов Φ_r и Ψ_r

$$\overline{\Phi}(x) = \Phi\left(x + \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \tag{24}$$

удовлетворяют соотношению

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}^{\frac{1}{r}}(\alpha x). \tag{25}$$

Существует простая зависимость между законами рассматриваемых классов.

Теорема 6. Для того, чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу Φ_r, соответственно Ψ_r, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi^*(x) = \overline{\Phi}(e^x)$, соответственно $\Phi^*(x) = \overline{\Phi}(-e^{-x})$, принадлежала классу λ_r, где $\overline{\Phi}(x)$ — центрированный закон (24) класса Φ_r, соответственно λ_r.

Доказательство. Пусть функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу Φ_r. Тогда для центрированной функции $\overline{\Phi}(x)$ выполняется соотношение (25), где $\alpha > 1$. Положим $\alpha = e^\beta$, $x = e^z$, тогда (25) запишется в виде

$$\overline{\Phi}(e^z) = \overline{\Phi}^{\frac{1}{r}}(e^z + \beta).$$

т. е.

$$\Phi^*(z) = \Phi^{*\frac{1}{r}}(z + \beta). \tag{26}$$

Таким образом, функция $\Phi^*(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению, определяющему класс λ_r. Остается доказать, что $\Phi^*(x)$ является функцией распределения. Для этого достаточно показать, что законы класса Φ_r непрерывны в точке $x = x_0$, где x_0 — левое крайнее число, или, что то же, что центрированные законы (24) непрерывны в точке $x = 0$. Действительно, допустим, что $\overline{\Phi}(+0) = a$, где $0 < a < 1$, и пусть $\xi(\xi > 0)$ — точка непрерывности функций $\overline{\Phi}(x)$ и $\overline{\Phi}(\alpha x)$. В силу (24) будем иметь

$$\overline{\Phi}(\xi) = \overline{\Phi}^{\frac{1}{r}}(\alpha\xi),$$

откуда, переходя к пределу при $\xi \to 0$, получаем равенство $a = a^{\frac{1}{r}}$, что ввиду $0 < r < 1$ и $0 < a < 1$ невозможно.